$e^{2x} - 4e^x - 5 = (e^x + 1)(e^x - 5) > 0$

On sait que $e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

$S =]\ln 5, +\infty[$

*/ $|e^{x-1} - 1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le e^{x-1} - 1 \le 3$

$-2 \le e^{x-1} \le 4$ on a :

$e^{x-1} \ge -2$ Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$

$e^{x-1} \le 4 \Leftrightarrow x - 1 \le \ln 4 = 2\ln 2.$

$\Leftrightarrow x \le 1 + 2\ln 2$. Donc $S =]-\infty, 1 + 2\ln 2]$

*/ $2e^{3x-1} - 3e^{2x-1} + e^{x-1} \le 0$

$\Leftrightarrow 2e^{3x}.e^{-1} - 3e^{2x}e^{-1} + e^x.e^{-1} \le 0$

$\Leftrightarrow e^{-1}(2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x) \le 0$

$\Leftrightarrow e^{-1} \times e^x (2e^{2x} - 3e^x + 1) \le 0$, et $e^{-1} \times e^x \ge 0$

$\Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x + 1 \le 0$

On a : $2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x = 0$ or $a + b + c = 0$

Donc : $e^x = 1$ ou $e^x = \frac{1}{2}$

Ce qui donne $x = 0$ où $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x = 2(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x - \frac{1}{2}$	$-$	0		$+$		$+$	
$2e^{3x} - 3e^{2x} + e^x$	$+$	0	$-$	0	$+$		

$S = [-\ln 2, 0]$.

Exercice 7

1) */ $f(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$f(1) = 1 \times e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

*/ $g(x) = x^2 e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = (x^2)'.e^{-x} + x^2.(e^{-x})'$

$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = g'(x)$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x - x^2$ car $e^{-x} > 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{+\infty}} = 0.$

2) Branches infinies :

*/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$\Rightarrow C_f$ Admet une branche infinie parabolique

De direction $(o, \vec{j})$.